@IT MONOist「独学！ 機械設計者のための自動制御入門（9）」

付録■銀二さんからの補足

「位相曲線の勾配は$\omega=1/\tau$で最大となり66°/decadeとなる証明」

「興味ある人は見てや～」

「僕は別に、い―けども……」

「…………」

$\tan\theta = \tau\cdot\omega$

をθで微分すると

$$\frac{1}{(\cos\theta)^2} = \tau\cdot\frac{d\omega}{d\theta}$$

だから

$$\tau\cdot\frac{d\omega}{d\theta} = 1 + (\tan\theta)^2 = (\tau\cdot\omega)^2$$

となって、結局

$$\frac{d\theta}{d\omega} = \frac{\tau}{1+(\tau\cdot\omega)^2}$$

となる。

θを$\log(\omega)$で微分すると

$$\frac{d\theta}{d(\log(\omega))} = \frac{d\theta}{d\omega}\cdot\frac{d\omega}{d(\log(\omega))} = \frac{\tau}{1+(\tau\cdot\omega)^2}\cdot\frac{d\omega}{d(\log(\omega))}$$

であるが、

$$\log(\omega) = \frac{\ln(\omega)}{\ln(10)}$$

だから、

$$\frac{d(\log(\omega))}{d\omega} = \frac{1}{\omega\cdot\ln(10)}$$

∴

$$\frac{d\theta}{d(\log(\omega))} = \frac{\tau}{1+(\tau\cdot\omega)^2}\cdot\frac{d\omega}{d(\log(\omega))} = \ln(10)\cdot\frac{\tau\cdot\omega}{1+(\tau\cdot\omega)^2}$$

$\frac{\tau\cdot\omega}{1+(\tau\cdot\omega)^2}$は$\tau\cdot\omega = 1$　のとき最大値をとり、そのときの$\frac{d\theta}{d(\log(\omega))}$の値は

$$\frac{d\theta}{d(\log(\omega))} = \ln(10)\cdot\frac{1}{1+1} = 1.151(rad\,/\,decade) = 66(°\,/\,decade)$$

である。

また、ゲイン曲線の勾配については

$$10\cdot\frac{d(\log(1+(\tau\cdot\omega)^2))}{d(\log(\omega))} = 10\cdot\frac{d(\log(1+(\tau\cdot\omega)^2))}{d\omega}\cdot\frac{d\omega}{d(\log(\omega))}$$

$$= \frac{10}{\ln(10)}\cdot\frac{d(\log(1+(\tau\cdot\omega)^2))}{d\omega}\cdot\frac{d\omega}{\frac{d(\ln(\omega))}{\ln(10)}}$$

$$= 10\cdot\frac{d(\log(1+(\tau\cdot\omega)^2))}{d\omega}\cdot\omega$$

$$= 10\cdot\frac{2(\tau\cdot\omega)^2}{1+(\tau\cdot\omega)^2}$$

である。

よって勾配は$\omega\to\infty$で$\to 20$となる。

なお、

$$\log(\omega) = \frac{\ln(\omega)}{\ln(10)}$$

の証明は以下である。

$y = \log(x)$

とおくと

$$x = 10^y = (\frac{10}{e} \cdot e)^y = (\frac{10}{e})^y \cdot e^y$$

だから、自然対数をとると

$$\ln(x) = y \ln(\frac{10}{e}) + y = y\left\{1 + \ln(\frac{10}{e})\right\}$$

となる。

$$\therefore y = \frac{\ln(x)}{1 + \ln(\frac{10}{e})} = \frac{\ln(x)}{\ln(10)} = \log(x)$$

以上